

分析式兵棋理論與模型綜述： 探討數學模式與模擬方法

劉達生

委任研究員

網路安全與決策推演研究所

摘 要

本文探討分析式電腦兵棋理論與模型，重點介紹數學模型與模擬方法。分析式兵棋以量化分析評估武器系統性能、戰術、策略或作戰概念，為決策者提供數據和建議。首先闡述物件、模型，與系統之間的關係，解釋模式模擬意涵。內容分為數學模式介紹與模擬方法探討。數學模式包含馬可夫鏈、藍徹斯特方程式、適應性作戰模型、定量判定模式以及理查森軍備競賽模型。模擬方法包括離散事件模擬、系統動力學，與多代理人模擬。綜合運用這些方法可以提高建模彈性，應對複雜問題，最後概述模擬研究流程。本文旨在協助軍事研究人員和戰術分析人員應對複雜戰場環境。

關鍵詞：分析式兵棋、模式模擬、數學模式、模擬

分析式兵棋理論與模型綜述：
探討數學模式與模擬方法

Mathematical Models and Simulation Methods

Review in Analytical Computer Wargaming

Ta-sheng Liu

Adjunct Research Fellow

Division of Cyber Security and Decision-Making Simulation

Abstract

This article delves into analytical wargaming theories and models, with an emphasis on mathematical models and simulation techniques. Analytical wargaming uses quantitative analysis to assess the performance of weapon systems, tactics, strategies, and operational concepts, offering valuable data and insights for decision-makers. The article first clarifies the connections among objects, models, and systems, while explaining the significance of model simulations. The content is divided into two main sections: an introduction to mathematical models and a discussion of various simulation methods. The mathematical models covered include Markov chains, Lanchester equations, Adaptive Model of War, Quantified Judgement Model, and Richardson arms race models. The simulation techniques encompass Discrete Event Simulation, System Dynamics, and Agent-Based Simulation. By integrating these methods, modeling flexibility is enhanced, and complex problems can be tackled effectively. Lastly, the article outlines the overall simulation research process. Its primary goal is to support military researchers and tactical analysts in navigating the intricate landscape of modern battlefields.

Keywords: *Analytical Wargaming, Modeling and Simulation, Mathematical models, Simulation*

壹、前言

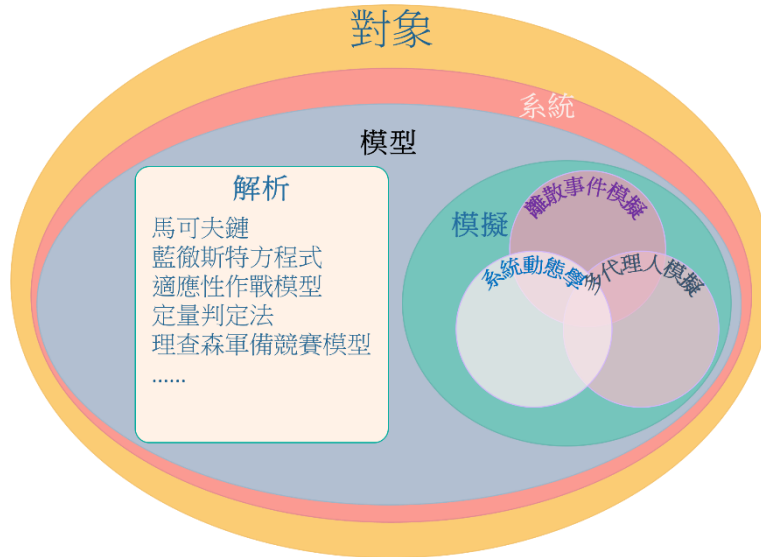
電腦兵棋在戰術與戰略分析領域中扮演著越來越重要的角色。它的應用不僅有助於提高指揮官的決策能力，還有助於在戰爭前進行有效的推演和預測。本文主要探討分析式兵棋 (Analytical Wargaming) 中的多種模型以及三大模擬方法。分析式兵棋作為兵棋類型之一，通過量化分析方法評估武器系統性能、戰術、策略或作戰概念，目的在於為決策者提供可靠的數據與建議，協助他們了解潛在的作戰結果及風險。

本文首先闡述了「對象」、「系統」與「模型」之間的關係，接著解釋了「模式模擬」的涵義。主要內容分為兩大部分：第一部分深入探討分析式兵棋中的數學模型，包括馬可夫鏈(Markov Chain)、藍徹斯特方程式(Lanchester Equations)、適應性作戰模型(Adaptive Model of War)、定量判定模式(Quantitative Judgement Model, QJM)，以及理查森軍備競賽模型(Richardson's Arms-Race Model)；第二部分針對數學模型的使用限制，介紹了三種主要的模擬方法：離散事件模擬(Discrete Event Simulation, DES)、系統動力學(System Dynamics, SD)和多代理人模擬(Multi-Agent Simulation, MAS)¹。這三種模擬方法各具特色與適用問題類型，綜合運用可提高建模靈活性，應對更複雜的問題。最後，本文概述了一般模擬研究的流程。全文架構如圖所示。

本文對分析式電腦兵棋中常用的軍事數學模型與模擬方法進行介紹性說明，旨在提供理論基礎與實用工具，協助軍事研究人員和戰術分析人員應對當今日益複雜且多變的戰場環境。在未來的軍事研究與實踐中，電腦兵棋將繼續發揮重要作用，為決策者提供具有科學基礎的有效支持。

¹ 多代理人模擬也稱代理人模擬 (Agent-Based Simulation)，或代理人模型 (Agent-Based Model)。本文以多代理人模擬為主，在涉及參考文獻原文內容時，則會使用原文的用法。

探究「對象」的層次



圖一文內容架構圖

資料來源：自行繪製

貳、基本概念釋義

在深入探討分析式兵棋的數學與模擬模型之前，需要先確定幾個基本概念。首先，「模型」包含兩個基本特徵：需要描述的「對象」和描述本身的「形象」。對象可以是人員、物件或一種情況。描述所表現的形象可能是文字敘述、數學公式、電腦程式，或是一個實體模型。因此，可以將模型定義為：

對「對象」的一種描述²。

模型所要描述的對象可能非常複雜且多層次。因此，在研究或探索時，根據目的需要劃定一個「邊界」。邊界內包含需要描述的元素、其重

² Nigel Gilbert 在所著 *Agent-based Models* (Thousand Oaks, California: Sage Publications, Inc., 2008), 4 這麼解釋「模型」: A model is intended to represent or simulate some real, existing phenomenon, and this is called the *target* of the model.

要特性以及元素之間的關係。這個由邊界、元素與特性所確定的對象被稱為「系統」。系統邊界以外的部分被稱為「環境」，而系統與環境之間的互動則表現為系統的「輸入」與「輸出」³。

「實驗」在自然科學領域中是一種標準的科學方法，同時在社會科學領域也被認為是進行解釋性研究的適當方法。在研究系統（即被定義的對象）和理解對象時，「實驗」是一個重要方法，因為它可以回答 "what-if" 類型的問題，並作為探索「因果關係」的主要手段。

在某些情況下，可以使用真實系統進行實驗，例如用真實的魚雷攻擊一艘真實的船艦。然而，有時真實系統無法取得或成本過高，這時會使用實體模型進行實驗，例如在水槽中產生波浪以觀察對模型船艦的影響。若實體模型無法滿足預算限制或無法展示足夠的細節，則可以通過電腦和程式語言建立模型來模擬對象並進行實驗。事實上，在作業研究和管理科學領域中，模擬方法都是最廣泛的使用方法之一。⁴

在軍事領域上經常聽到的「模式模擬」應該是美軍“Modeling and Simulation”這個概念。這個詞語的意思是：

運用靜態的，或是隨時間改變的模型，來獲取數據，以作為管理或技術決策的基礎。⁵

因此，「模式模擬」的涵義具備了以下幾個方面：建立並驗證滿足需求的模型、多次應用模型以收集數據、分析這些數據以輔助決策過程。在分析式電腦兵棋的基本詞彙中，對象、模型、實驗、模擬以及模式模擬的基本概念涵蓋了模型所描述對象、需求分析、模型的應用、數據的收集與分析評估，以實現決策輔助為核心目標。下面將分別介紹戰鬥與軍事對抗的數學模型，以及常用的三種模擬方法。

³ Robinson Stewart, “Conceptual modelling for simulation Part I: definition and requirements”, *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 59, No.3, 2008, pp. 278-290.

⁴ Averill M. Law, *Simulation Modeling and Analysis* (Tucson: Averill M. Law & Associates, Inc., 2013), 2.

⁵ The Under Secretary of Defense for Acquisition Technology, *DoD Modeling and Simulation (M&S) Glossary* (Washington, D.C.: Defense Modeling and Simulation Office, 1998), P.2.13.24.

分析式兵棋理論與模型綜述：
探討數學模式與模擬方法

參、數學模式

在描述兩軍交戰或軍事對抗的現象時，存在一些常用的數學模型。數學模型的優勢在於模型中變數之間的關係清晰明確，運算過程相對簡單（儘管過程可能複雜）。

一、馬可夫鏈

將直射武器的交戰過程用馬可夫鏈 (Markov Chain) 進行定義，同時考慮狀態轉移的機率和所需耗費的時間(如圖)。經過整理和簡化後，我們可以得到方程式 1⁶。此方程式計算的結果表示「單位時間內預期擊毀目標的數量」。

$$E[T] = ta + t1 - tr + (tr + tf) \times \frac{1}{p \times p(K|H)} \quad \text{方程式 1}$$

式中

ta 為獲得目標所需消耗的時間

$t1$ 為目標獲得後到第一枚彈藥發射的時間間隔

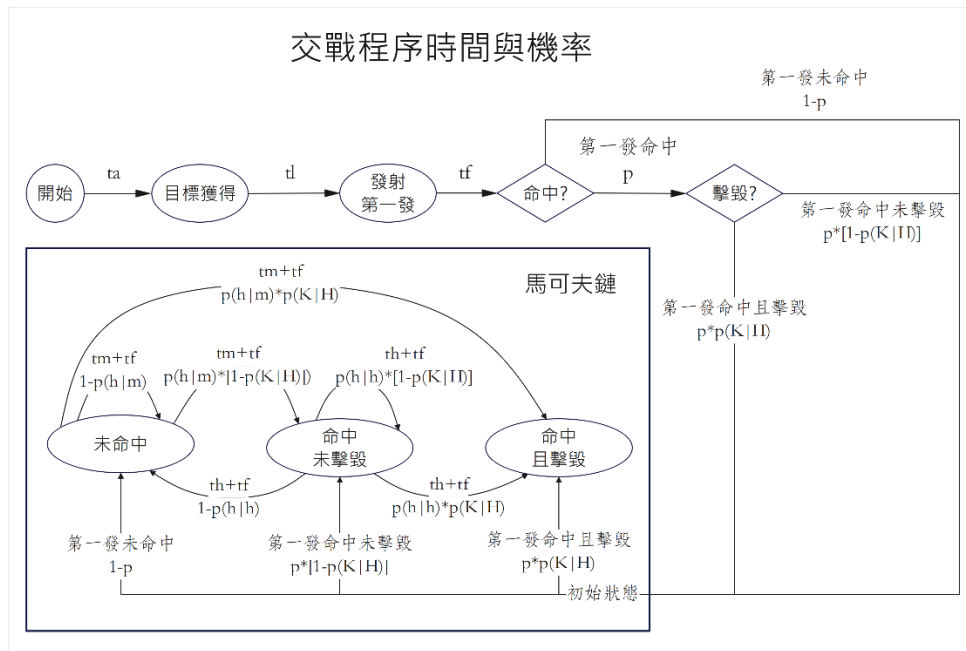
tr 為重複發射所需時間

tf 為彈體飛行時間

p 為命中機率

$p(K|H)$ 為命中且擊毀目標的機率

⁶ 劉達生、孟昭宇、黃順萌，〈戰車攻擊力評估法則之建立〉，《裝甲兵季刊》，192期，民93，頁42-55。



圖二 戰車交戰程序的馬可夫鏈隨機過程

資料來源：同註 6

圖 2 符號說明（其餘同方程式 1 符號）：

- tm 前一發未命中目標，這一發所需的射擊準備時間
- th 前一發命中目標，這一發所需的射擊準備時間
- $p(h|m)$ 前一發未命中目標，這一發命中的條件機率
- $p(h|h)$ 前一發命中目標，這一發也命中的條件機率

該模型可用於計算和比較不同距離、不同武器系統（如戰車砲與反裝甲飛彈）對單一目標或集群目標的擊殺率，但只適用於不具有主動防禦能力的目標。若目標具有防空能力的船艦，則此建模思路可能不太適合。

分析式兵棋理論與模型綜述：
探討數學模式與模擬方法

除了用來計算擊殺率，馬可夫鏈也可以用於多層防禦模型的建構。由於攔截器（如防空飛彈）對來襲目標的攔截成功與否具有隨機性，因此可以用「攔截成功率」來表示。當有多個來襲目標（如飛彈）進行攻擊時，防禦方可以實施多層次的攔截防禦（例如泰德系統與愛國者系統搭配）。由於攔截本身具有隨機性，其防禦結果也會呈現機率分佈。

多層防禦模式主要結合馬可夫鏈與二項分佈（Binomial Distribution），並以矩陣形式進行呈現和計算。假設一批來襲的威脅同時到達防禦系統的接戰區，已知防禦系統的防禦能量（同時能攔截幾個目標）、識別率（成功區分誘標與目標的機率）、攔截器的攔截成功率等，便可以求得突穿數量的機率分佈、攔截器消耗量等資訊。

圖 呈現了一個假想的三層防禦系統，比較了不同射擊準則（防空系統對同一目標發射攔截器數量）各層以及最終突穿數量期望值的情況。

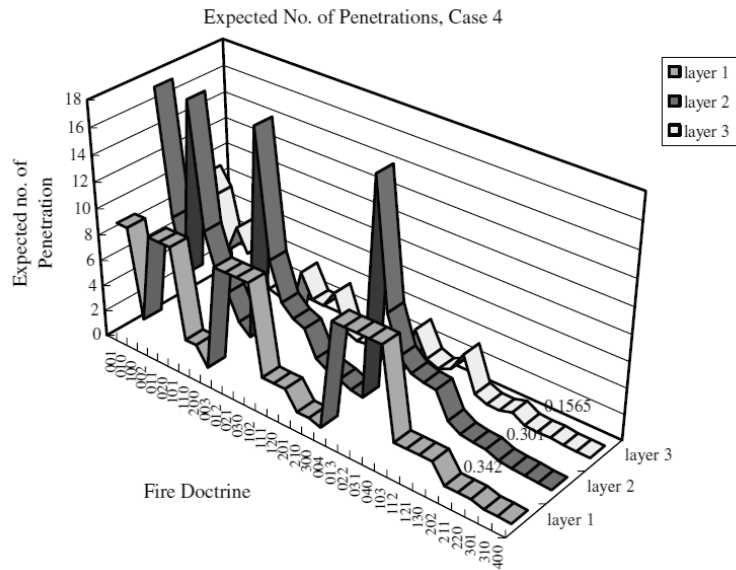


圖 三 假想的三層防禦系統不同射擊準則下防禦結果比較

資料來源：Jau-yeu Menq, Pan-chio Tuan, Ta-sheng Liu, "Discrete Markov ballistic missile defense system modeling." *European Journal of Operational Research*, 178, 2007, p. 577.

二、藍徹斯特方程式

藍徹斯特方程式(Lanchester Equation)曾經是廣泛運用的數學模型，用於探討交戰問題。該方程式基本上是一組描述交戰雙方兵力遞減過程的微分方程組。方程式的原型分為平方律(Square Law)與直線律(Linear Law)，分別描述在特定條件下採取瞄準射擊(Aimed Fire)和區域射擊(Area Fire)時，雙方兵力損耗的現象。

表 藍徹斯特方程式列舉

Type	Defender	Attacker	Remarks
Aimed fire ^{10,15}	$\frac{dx}{dt} = -ay$	$\frac{dy}{dt} = -bx$	$b(x_0^2 - x^2) = a(y_0^2 - y^2)$
Area fire ^{10,15}	$\frac{dx}{dt} = -axy$	$\frac{dy}{dt} = -bxy$	$b(x_0 - x) = a(y_0 - y)$
Ambush ¹⁰	$\frac{dx}{dt} = -ay$	$\frac{dy}{dt} = -bxy$	$\frac{b}{2}(x_0^2 - x^2) = a(y_0 - y)$
Operational losses ¹⁰	$\frac{dx}{dt} = -ax$	$\frac{dy}{dt} = -by$	$b \ln \frac{x_0}{x} = a \ln \frac{y_0}{y}$ Early stage of small unit engagement
Fire support ¹⁰	$\frac{dx}{dt} = -ay - \lambda x$	$\frac{dy}{dt} = -bx - \mu y$	supporting fire not subject of attrition
Fire effectiveness ^{10,15}	$\frac{dx}{dt} = -a(t) \times y \times h\left(\frac{x}{y}\right)$	$\frac{dy}{dt} = -b(t) \times x \times h\left(\frac{y}{x}\right)$	h : inefficiencies of scale ⁹
Historical attrition law ^{12,13,14}	$\frac{dx}{dt} = -e^C x^D y^G$	$\frac{dx}{dt} = -e^F x^G y^D$	D, G : universal constants C, F : varied coefficients
Attrition and break point ^{10,15}	$\frac{dx}{dt} = -a(1 - f_I^Y) \left(1 - \frac{y_0 - y}{y_0 - y_{BP}}\right)^v y$	$\frac{dy}{dt} = -b(1 - f_I^X) \left(1 - \frac{x_0 - x}{x_0 - x_{BP}}\right)^\mu x$	f_I, x_{BP}, y_{BP} : the inherent ineffective fraction and break-point of x, y
Reinforcement ¹⁵	$\frac{dx}{dt} = -ay + X$ $\frac{dx}{dt} = -ay - cx + X$	$\frac{dy}{dt} = -bx + Y$ $\frac{dy}{dt} = -bx - dy + Y$	X, Y : reinforcements rate
Range dependent kill-rate ¹⁰	$\frac{dx}{dt} = -a_0 \left(1 - \frac{r}{r_a}\right)^v y$	$\frac{dy}{dt} = -b_0 \left(1 - \frac{r}{r_b}\right)^\mu x$	r_β, r_a, v, μ : maximum effective range of weapons; range dependence parameters r_0, V : opening range of battle, attack speed
Attrition rate coefficients and range (Mobile attack) ^{10,15}	$\frac{dx}{dt} = -k_a \left(t + \frac{r_a - r_0}{v}\right)^v y$	$\frac{dy}{dt} = -k_b \left(t + \frac{r_b - r_0}{v} + \frac{r_\beta - r_a}{v}\right)^\mu x$	
Vulnerable area ^{10,14} Small arm	$\frac{dx}{dt} = -\frac{v_Y a_Y v_X}{A_X} xy$	$\frac{dy}{dt} = -\frac{v_X a_Y v_Y}{A_Y} xy$	v, a_Y, a_L, A : fire-rate, vulnerable area, lethal area and presented area
Large lethality	$\frac{dx}{dt} = -\frac{v_Y a_L v_X}{A_X} xy$	$\frac{dy}{dt} = -\frac{v_X a_L v_Y}{A_Y} xy$	
Guerrilla warfare ^{10,15}	$\frac{dx}{dt} = -a(t)y$	$\frac{dy}{dt} = -[b_1(1 - e^{-\gamma t}) + b_2 y e^{-\gamma t}]x$	γ : shift rate from area fire to aimed fire

資料來源：Jau-yeu Menq, Pan-chio Tuan and Ta-sheng Liu, "Conceptual Lanchester-type Decapitation Warfare Modelling", *Defense Science Journal*, Vol.57, No. 4, 2007, p. 453.

經過多年的演進，已經發展出針對各種不同交戰情境的藍徹斯特方程式類型。

表 列出了部分確定性-均質型(deterministic-homogeneous)的藍徹斯特模型。除了基本的平方律和直線律之外，還包括了描述伏擊、非戰鬥損失、火力支援、增援以及游擊戰等情況的模型。

藍徹斯特方程式主要用於描述交戰雙方兵力的變化過程，因此通常以某一方的兵力降至特定百分比作為戰鬥結束的條件，亦即終戰條件，並根據此條件計算雙方的交戰持續時間。除了戰損和交戰時間的分析外，空間控制也是作戰議題的探討重點。在藍徹斯特方程式中，部隊撤退行為通常以最大撤退速度和兵力比來加以描述⁷，而 Joshua M. Epstein⁸ 在 1985 年對藍徹斯特方程式提出了三個問題，撤退即為其中之一：

1. 未明確說明「撤退」的理由。
2. 未涵蓋「空間換取時間」的概念。
3. 未考慮兵力規模邊際效益遞減。

考慮到藍徹斯特模型的局限性，Epstein 建立了一個數學模型來分別描述攻守雙方的狀態。對於防守方來說，「撤退」的一個基本原因是減少自身戰損。當防守方的戰損超過某個門檻值時，他們可能會撤退，通過調整防線位置來降低戰損。而積極攻擊的一方則通過調整攻擊節奏來控制戰損；同時，攻擊方的戰損率也受到防守方撤退速度的影響。Epstein 將這個模型稱為「適應性作戰模型」(Adaptive Model of War)。

除了描述戰損與撤退（戰線移動）之間的關係外，適應性作戰模型還包括空中密接支援(Close Air Support, CAS)，形成了一個空地作戰(Airland Battle)模型。該模型利用詳細且明確的步驟來計算作戰過程，因此可以建立電腦運算模式進行計算和結果呈現，如圖 所示。

儘管適應性作戰模型涵蓋的範疇更廣泛且具有更高的模擬操作性，但相關研究和應用文獻較少，導致模型參數不易獲取。

⁷ James G. Taylor, *Lanchester Models of Warfare, Volume II* (Monterey, California: ORSA-Operation Research Society of America, 1983): p. 533.

⁸ J. M. Epstein, *The Calculus of Conventional War: Dynamic Analysis without Lanchester Theory* (Washington, D.C.: The Brookings Institution: 1985), 4-13

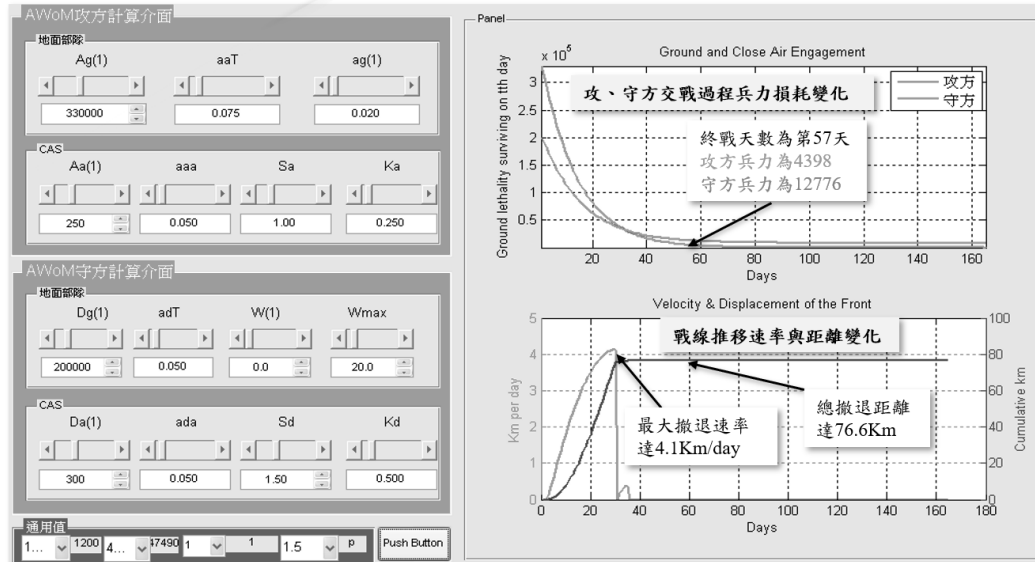


圖 四適應性作戰電腦模型使用介面

資料來源：李泰平，〈陸軍地面作戰基本戰術分析—適應性作戰模型之應用〉，國防大學管理學院資源管理及決策研究（民 100），頁 40。

三、定量判定模式

定量判定模式(Quantified Judgement Model, QJM)是由美國退役上校 Trevor N. Dupuy 成立的 Historical Evaluation and Research Organization(HERO)為美國國防部(U.S. Department of Defense) 和英國國防作戰分析中心 (British Defense Operational Analysis Establishment) 所進行的戰史研究成果⁹。該模式基於大量戰史數據，從武器系統特性到作戰單位組成（包括空中密接支援和防空）、天氣、地形和攻防態勢等各種因素，都以圖表或數值進行量化。通過標準化的計算過程，以天為單位，計算交戰雙方各類型部隊和武器裝備的戰損、推進距離等作戰結果，如表 所示。該模型的簡化版本在波灣戰爭期間（1990 年 12 月 13

⁹ Colonel T. N. Dupuy, *Numbers, Predictions and War: Using History to Evaluate Combat Factors and Predict the Outcome of Battles, Revised Ed.* (Fairfax, Virginia: HERO Books, 1985).

分析式兵棋理論與模型綜述：
探討數學模式與模擬方法

日) 被用來向美國眾議院說明美軍在戰爭中可能遭受的戰損。¹⁰。

定量判定模式的邏輯、參數和算法都是基於大量的戰史和歷史數據產生的，具有相當的可信度。然而，也正因為模式是依據歷史經驗和數據生成的，若未持續參照最新的作戰經驗進行修正和補充，可能會與作戰發展的實際軌跡產生偏差。

表二 QJM 操作程序

<p>QJM 操作程序:</p> <ol style="list-style-type: none">1. 完成參謀作業，得出交戰雙方戰鬥序列(complete Order of Battle, OB)以及編裝表。2. 列出參戰武器，查閱或計算各型武器（區分十二大類）的作戰殺傷指數(Operational Lethality Index, OLI)。3. 依據環境（地形、季節、天氣）與空優等因素計算兵力強度(strength, S)。4. 將兵力強度以攻防態勢、機動力、易損性、奇襲、領導、士氣，及後勤等因素修正為作戰潛力(combat power, P)。5. 依照雙方的作戰潛力(P)的比值，再考慮環境、疲勞等因素，推算雙方人員及各類裝備的作戰損失，以及推進距離。
--

資料來源：整理自註 10

四、理查森軍備競賽模型

本模型由 Lewis Fry Richardson(1960)提出¹¹，該模型運用微分方程組來表示互為對手的雙方（或多方）在軍備上的動態互動關係，這種互動關係是源於彼此之間的不信任。在此模型中，有兩個受人關注的概念：「軍備競賽穩定性」和「危機穩定性」。

軍備競賽穩定性：當對抗雙方的軍備水平達到一定程度時，若雙方軍備水平的增量都小於對方的增量，則存在所謂的「穩定性」。在這種

¹⁰ Colonel T. N. Dupuy et al., *If War Comes, How to Defeat Saddam Hussein* (McLean, Virginia: HERO Books, 1991).

¹¹ Lewis F. Richardson, *Arms and Insecurity: A Mathematical Study of the Causes and Origins of War*, (Pittsburgh: Boxwood, 1960).

情況下，雙方的軍備水平將在某一水平上停止增長。如果沒有軍備競賽穩定性，在理論上雙方的軍備水平將持續無限增長，如圖 所示。

危機穩定性：如果雙方都預期在戰爭結束後，自己的軍事實力會不如對方，那麼雙方都不會挑起戰爭；在這種情況下，具有危機穩定性。然而，如果任何一方認為戰爭結束後，自己的軍事實力將優於對手，那麼他們可能會主動挑起戰端；在這種情況下，缺乏危機穩定性，如圖 所示。

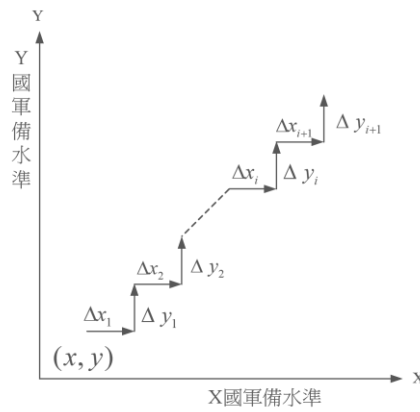


圖 五 雙方軍備持續增長

資料來源：孟昭宇，美、中與我國三方軍備競賽分析，民 93。

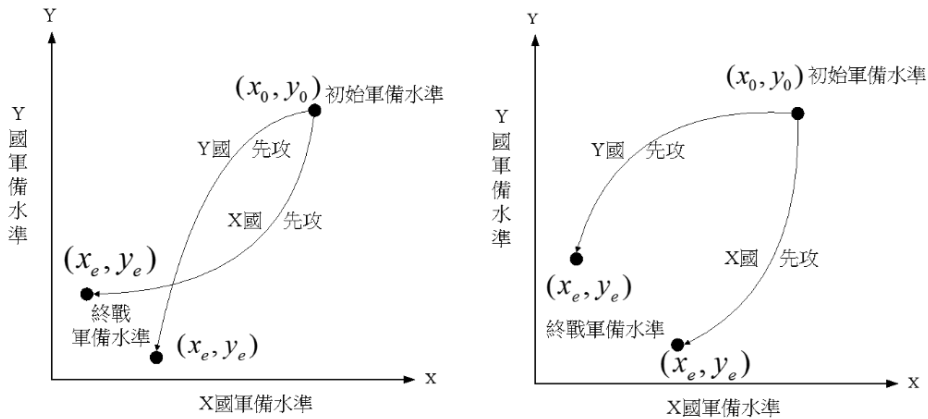


圖 六 左圖：具備危機穩定性，右圖：不具危機穩定性

資料來源：孟昭宇，美、中與我國三方軍備競賽分析，民 93。

分析式兵棋理論與模型綜述：
探討數學模式與模擬方法

近年來，有關軍備競賽的研究對理查森軍備競賽模型的基本形式（方程式 2）進行了擴展，將經濟能力、投資和其他非軍事開支等變量納入考慮。這些研究結合了系統動力學 (System Dynamics, SD) 進行模擬分析，試圖將該模型在國際關係領域進一步推廣和應用¹²。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ky - ax + g \\ \frac{dy}{dt} = lx - by + h \end{cases} \quad \text{方程式 2}$$

x, y ：為兩國的軍備水準
 k, l ：為兩國的防務係數
 a, b ：為兩國的疲勞（費用）係數
 g, h ：為兩國的懷疑或不滿係數

上述簡要介紹了應用於武器系統層級的馬可夫鏈擊殺率模型、任務層次的多層防禦模型、戰役分析的藍徹斯特模型、適應性作戰模型、定量判定模式，以及涉及國際關係的理查森軍備競賽模型。這些模型可以作為特定問題探討時的分析工具。

在許多情況下，軍事議題的複雜程度可能不符合數學模型的假設條件。例如，在區域內存在多個防空系統的情況下，來襲威脅可能並非同時進入各防空系統的接戰範圍。這種情況不符合多層次防禦馬可夫鏈模型的適用條件。又如涉及跨層次問題的情況，例如在多類型部隊使用多種武器交戰的情境中，需要同時考慮武器層次的相對殺傷能力和部隊層次的交戰結果。在這些情況下，單一的數學模型可能難以滿足作戰分析需求，而必須結合模擬方法來更全面地分析複雜的作戰問題。

¹² Ali Fisunoglu, “System Dynamics Modeling in International Relations”, *All Azimuth*, Vol. 8, No. 2, 2019, pp. 231-253

肆、模擬方法

模擬是一種實驗方法，通常以電腦模擬的形式進行複雜系統的模擬。這種在電腦上進行的實驗方式可以應用於尚不存在的系統，或者是實驗將導致功能或服務中斷的情況（如車站），以及涉及研究倫理的社會研究。模擬通常被認為是一種具有彈性、強大且直覺的實驗工具。以下簡要介紹四種常用的模擬方法：蒙地卡羅模擬(Monte Carlo Simulation)、離散事件模擬(Discrete Event Simulation)、多代理人模擬(Multi-Agent Simulation)，以及系統動力學(System Dynamics)。

一、蒙地卡羅模擬

屬於靜態的模擬方法，也就是研究的對象的狀態並不會隨時間改變。這種模擬方法的特徵是反覆的產生隨機數，以觀察並掌握模型產出來的結果。主要用於分析具有隨機變數的系統。這種方法可以幫助研究者評估不確定性對系統運行的影響，並為決策提供隨機性的結果。

例如，假設有兩種精度不同的對地飛彈可用於攻擊一個 20 公尺乘 150 公尺的矩形目標。A 型飛彈的圓形公算誤差 (circular error probable, CEP) 為 5 公尺，B 型飛彈的 CEP 為 20 公尺。兩者都配備相同的彈頭，殺傷半徑均為 20 公尺。現在的問題是，平均每枚飛彈能對目標造成多少百分比的損毀。

在這個問題中，目標的位置、大小、飛彈的 CEP 以及彈頭的殺傷範圍都是已知的。不確定的是彈著點，這可以通過蒙特卡羅模擬來估算平均每枚飛彈對目標的損毀比例。

首先，將矩形目標劃分為 3000 個 1 平方公尺的小方格。然後，根據 CEP 和標準差的關係，計算出 A 型和 B 型飛彈彈著點分布的標準差分別為 4.25 公尺和 16.99 公尺。假設彈著點在縱向和橫向軸上的分布具有相同的變異數 (equal variance)，並且平均彈著點與矩形目標的正中心重合 (zero offset)。若位於殺傷半徑內，則視為損毀；若超過殺傷半徑，則視為未損毀 (cookie cutter damage function)。

接下來，以計算出的標準差和目標中心點為基準，生成數十個模擬彈著點。然後計算每個 1 平方公尺的小方格與彈著點之間的距離。如果距離小於殺傷半徑 (20 公尺)，則該方格被損毀；否則，則為未損毀。示意圖如圖 所示。對每個小方格進行計算後，統計該彈著點的損毀面

分析式兵棋理論與模型綜述：
探討數學模式與模擬方法

積。反覆完成數十個彈著點的計算後，便可估算出平均每個模擬彈著點對目標的損毀百分比。

經過進行多次模擬並計算每次模擬的損毀百分比，我們可以估算出 A 型和 B 型飛彈對目標的平均損毀效果。這種蒙特卡羅模擬方法允許我們克服問題的不確定性，獲得更可靠的估算結果。依照這個程序模擬完之後，大概可以得出 A 型飛彈對該目標的平均毀傷比例約為 25%，B 型飛彈則為 4.55%。

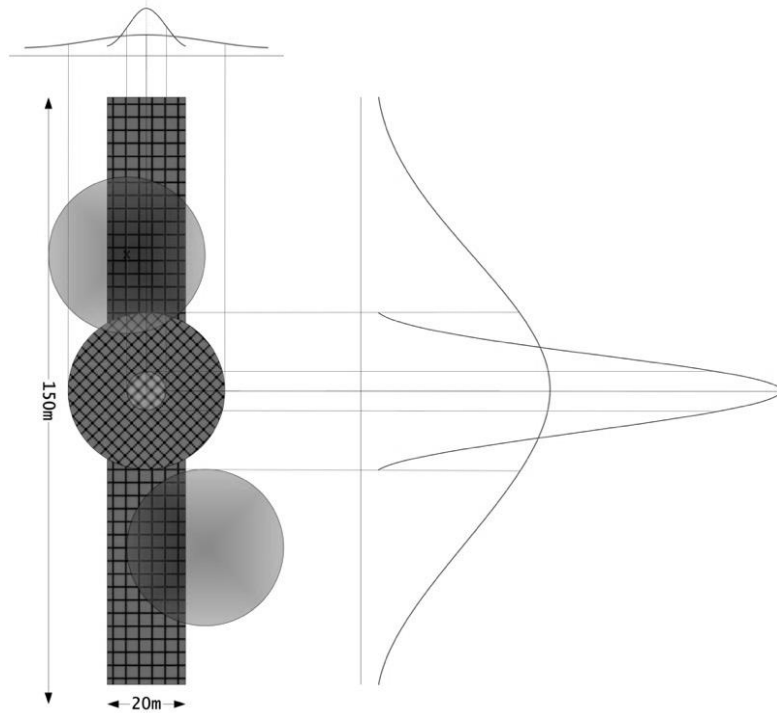


圖 七 對矩形目標毀傷的模擬示意圖

資料來源：自行繪製

從前述範例中可明顯看出，蒙特卡羅模擬涉及隨機數的產生。事件的發生及其結果具有隨機性，同時過程中也包含了確定性計算，例如與彈著點中心的距離。儘管蒙特卡羅模擬屬於靜態模擬，但它仍然是其他幾種模擬方法的基礎，尤其是離散事件模擬和多代理人模擬。在大多數

情況下，這些模擬方法需要不斷產生隨機事件或隨機結果以模擬事態的發展。

二、離散事件模擬(discrete-event simulation, DES)

離散事件模擬根據事件發生的先後順序推動模擬。這種模擬方法適用於處理程序導向的問題，描述實體在系統中的過程，因此在生產、服務和物流領域得到了廣泛應用，如圖 所示。



圖 八 物流中心模擬

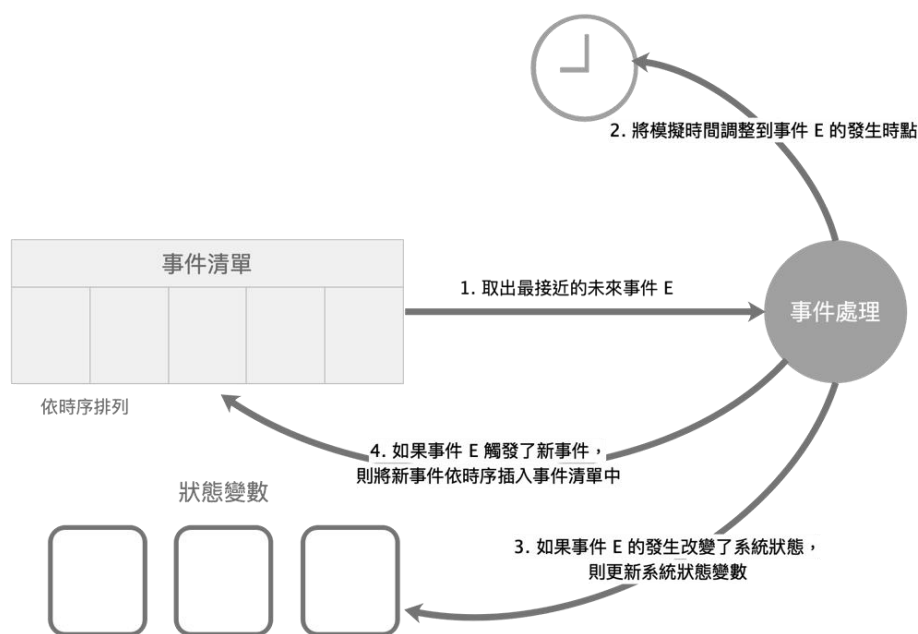
資料來源：AnyLogic North America, AnyLogic 8.8.1 University Edition 中的範例 Examples/Supply Chains and Logistics/Distribution Center

這種模擬方法的運作機制如下：

模擬中存在一個按照發生時間先後順序排列的「事件清單」。一個「事件處理」機制從「事件清單」中提取與當前時間最接近的未來事件進行處理，並將模擬時間推進到該事件發生的時間點。如果發生的事件會改變系統的「狀態變數」，則系統狀態將相應地進行調整。如果某事件觸發了新的事件，則將新事件按照其未來發生的時間插入「事件清單」

分析式兵棋理論與模型綜述：
探討數學模式與模擬方法

中，如圖所示。



圖九 離散事件模擬運作機制

資料來源：自行繪製

離散事件模擬被視為多代理人模擬 (Multi-Agent Simulation, ABS) 和系統動力學 (System Dynamics, SD) 的基礎，主要原因在於這兩種模擬方法都需要使用離散事件模擬中的計時機制 (time advance)。因此，多代理人模擬有時也被認為是「離散事件模擬的特例」(ABS is just a special case of DES)¹³。另一方面，系統動力學也只不過是採用了固定時隔的計時機制(fixed-increment time advance, FITA)的離散事件模擬罷了¹⁴。然而，電腦本身具有離散性，無論是時間還是數值，在電腦中都會被離散化。因此，無論使用哪種模擬方法，只要涉及到電腦，時間都必然會被離散化。將模擬方法僅依據時間離散化進行分類的意義並不大，更重要的是要關注模擬方法的特性。

¹³ 同註 4 694.

¹⁴ 同註 4 693.

三、多代理人模擬(Multi-Agent Simulation, MAS)

多代理人模擬基於一個核心觀念：「巨觀模式 (macro-patterns) 是由微觀 (micro) 個體互動所湧現 (emerge) 的」¹⁵。這種模擬方法強調「互動」，與離散事件模擬所著重的「過程」或個體的「歷程」有所不同。

多代理人模擬方法的起源被認為來自「複雜系統理論」，它代表了一種新的框架或觀點，而非一門新的科學。這種方法被認為能為現有科學領域提供新的視角，包括自然科學、社會科學領域，以及軍事作戰，如圖 所示。

多代理人模擬強調個體的異質性 (heterogeneous)，每個個體都具有各自的特點 (屬性)，能夠感知環境 (包括其他個體)，並根據自身的屬性和目標對環境作出反應。由於多代理人具有很高的聚合 (aggregate) 彈性，如個人可以聚合為家庭，家庭聚合為社區，社區聚合為城市等，因此多代理人模擬可以非常細緻地描述最基本的個體，同時也可以描述具有高度聚合性的組織或社會群體。



圖 十 以多代理人模擬進行作戰分析示意圖

資料來源：Andrew Ilachinski, *Artificial War Multiagent-Based Simulation of Combat* (Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004): xx.

¹⁵ Uri Wilensky, *Modeling Nature's Emergent Patterns with Multi-Agent Languages*, Northwestern University, 2001. 下載網址：<https://ccl.northwestern.edu/2013/mnep9.pdf>, 存取日期 2023/2/4。

分析式兵棋理論與模型綜述：
探討數學模式與模擬方法

細胞自動機 (cellular automaton) 是一種簡單的代理人模擬。例如，在一個由方格構成的平面上，有一隻面朝北的螞蟻。平面上的所有方格一開始都是白色的。螞蟻在這個方格世界中移動的規則如下：

1. 如果所在位置的格子是白色 (黑色) 的，則右轉 (左轉)。
2. 向前走一格。
3. 走完後原來站的格子改成黑色 (白色)。
4. 反覆 1~3。

在這個例子中，代理人基本上是自己與自己互動 (或者說是當前的自己與過去的自己互動，環境中的黑白格子可以看作螞蟻移動的歷史軌跡)。由於規則是確定的，沒有隨機性；系統的初始狀態也是確定的 (所有格子都是白色，螞蟻一開始面朝北)。對於這樣一個確定且規則簡單的過程，人們卻很難想像這隻螞蟻的移動軌跡會如何發展。

令人驚奇的是，這個規則反覆運行的結果表明，這隻孤獨的螞蟻似乎在修築一條筆直的「高速公路」，如圖 所示。這個例子不僅展現了「巨觀的樣態是由微觀個體的互動湧現出來的」的概念，還顯示了即使是確定且簡單的互動過程，如果沒有電腦運算的輔助，很難推測其結果。

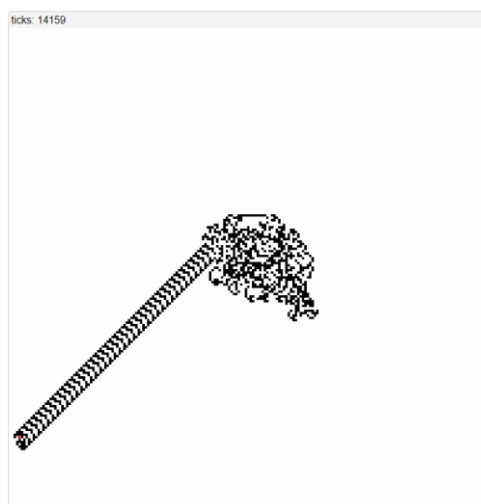


圖 十一 簡單且確定的規則所產生圖案

資料來源：使用 NetLogo 程式語言編寫程式產生

除了上述簡單的環境、狀態和規則的模擬之外，多代理人模擬也可以應用於描述更為複雜的系統，如觀點動力學 (opinion dynamics)¹⁶或選舉結果的預測¹⁷等。

在觀點動力學模擬中，代理人可以代表具有不同觀點和信仰的個人，它們根據自己的信仰和與其他代理人的互動來更新自己的觀點。這種模擬可以幫助我們瞭解群體中觀點是如何形成、傳播和變化的，並揭示出在特定情況下，哪些因素可能對觀點形成和變化起到關鍵作用。

選舉結果預測的多代理人模擬可以用來分析選民在選舉中的行為。代理人可以代表不同政治立場、社會經濟背景的選民，根據候選人的政策、媒體報導和其他選民的影響等因素來決定自己的投票選擇。這種模擬有助於預測選舉結果，並分析影響選舉結果的各種因素，如政策、宣傳策略等。這些更複雜的多代理人模擬可以幫助我們更深入地理解社會科學領域的問題，並為政策制定和決策提供有益的見解。

四、系統動態學(system dynamics, SD)

系統動態學 (System Dynamics, 簡稱 SD) 是一種應用於企業、政府或軍事政策和策略問題分析的連續型模擬方法。它起源於 1950 年代，由麻省理工學院的 Jay Forrester 教授提出。與多代理人模擬不同，系統動態學更注重「聚合」(aggregate)，即將同類事物視為一體而不區分細節。

例如，在分析人口變化時，系統動態學可能會將所有人視為一個整體，而不區分性別、年齡等細節。這種方法有助於簡化模型並提高計算效率，但可能忽略一些細節和差異。

系統動態學的核心概念是通過建立因果回路圖 (Causal Loop Diagrams, CLD) 來瞭解系統中各變量之間的相互作用和影響。這些因果回路圖有助於呈現系統中的正反饋機制，並預測系統行為的變化。通過將變量之間的關係轉換為數學方程，系統動態學模型可以用來模擬系統

¹⁶ Rainer Hegselmann and Ulrich Krause, "Opinion Dynamics and Bounded Confidence Models, Analysis, and Simulation", *Journal of Artificial Societies and Social Simulation (JASSS)*, vol.5, no. 3, 2002.

¹⁷ 唐世平 (發明人), 〈基於電腦模擬技術的選舉結果預測方法〉, 中華民國專利資訊檢索系統, 證書號: I660283。

在不同情況下的行為。

簡言之，系統動態學是一種連續型模擬方法，強調對整體的聚合分析，而不是像多代理人模擬那樣關注個體之間的互動和差異。

系統動態學有幾個基本概念¹⁸：

1. 採取「內生」觀點來看系統。認為系統是封閉的因果關係，系統自己的內部決定了系統的行為。
2. 找出系統中的因果回饋環路。因果回饋環路是系統動態學方法的核心。
3. 找出積量（累積的數量），以及影響積量的所有流量。積量是系統的記憶，是系統失衡的根源。
4. 認為個別事件與個體決策都是表象，其根源在於系統的結構與系統的行為¹⁹。以連續的觀點來看系統，而忽略個別的事件與決策。

系統動態學的數學形式是微分方程組，但是一般會以圖形的方式來建模，如圖，圖形表示包含了以下元素：

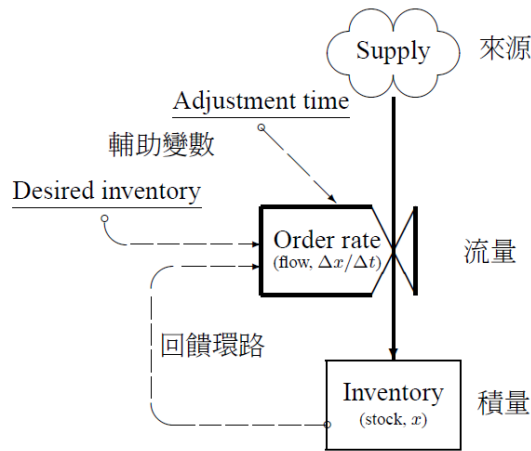
1. 積量（存量水準）：是聚合的 (aggregated) 概念，也就是同一個積量內的實體是均質的 (homogeneous)、無差異的。若有需要考慮差異，就要以不同的積量來描述。例如倉庫中的存量 (inventory) 是否需要區分高價品及非高價品。
2. 流量（積量的變化）：造成積量變化的流動，也就是「流速」的概念，例如訂購率 (order rate) 像水龍頭一樣控制倉庫的流入量。一個積量可能有多個流量，包含流入與流出。
3. 回饋環路(feedback loop)：流量會影響積量，反過來積量也會影響流量。圖中的流量(訂購率)也受到積量(庫存水準)的影響。也就是，存量水準高的時候，訂購率會小些；存量水準低的時

¹⁸ Andrei Borshchev, *The Big Book of Simulation Modeling: Multimethod Modeling with AnyLogic 6*, Kindle 版本, 位置 802.

¹⁹ 作者註：系統動態學與多代理人模擬都抱持「系統結構決定巨觀現象」的想法。

候，訂購率會高一些。

4. 輔助變數：流量（訂購率）除了會受到積量（存量水準）的影響外，還受到訂購調整時間（adjustment time）及預期存量水準（desired inventory）的影響。這類既非積量，也非流量的變數一般稱為輔助變數。



圖十二系統動力學基本圖示符號

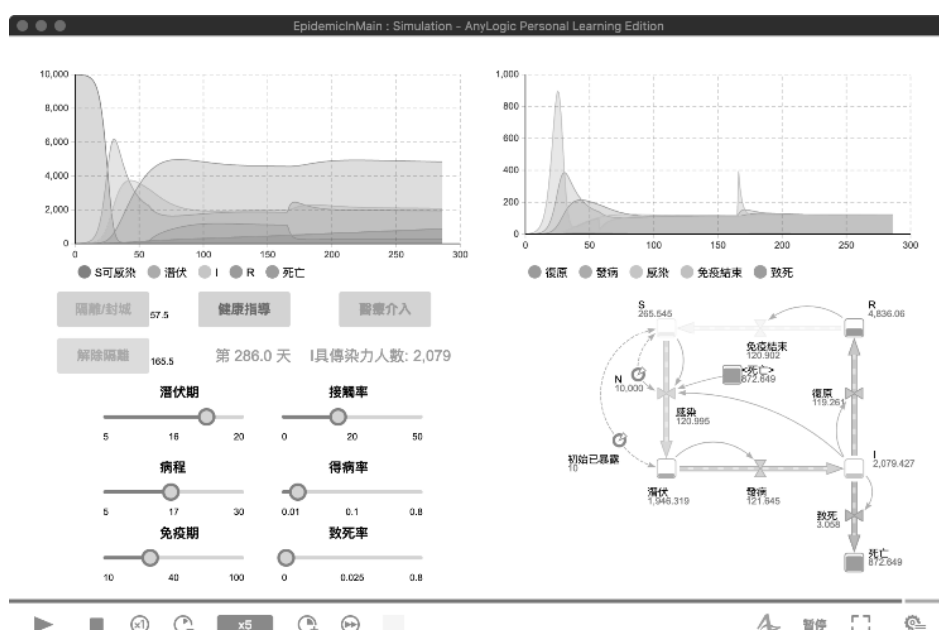
資料來源：Nigel Gilbert and Klaus G. Troitzsch, *Simulation for the Social Scientist*, 2nd Ed., Berkshire, England: Open University Press, 2005, p.30.

圖展示了一個以系統動力學建立的疾病傳播模型。在此模型中，處於不同疾病階段的人被視為一個存量，包括易感者 (Susceptible, S)、已暴露者 (Exposed, E)、具傳染力者 (Infectious, I)、康復者 (Recovered, R)，以及病故（死亡）。

誠如 Sterman(2000)²⁰所指，系統動力學基於數學、物理和工程領域的非線性動態和回饋控制理論，將這些方法應用於同樣具有複雜性的人類行為研究，可以為社會心理學、經濟學以及其他社會科學帶來新的認識。

²⁰ John D. Sterman, *Business Dynamics, Systems Thinking and Modeling for a Complex World* (Boston: McGraw-Hill, 2000): 5-6.

分析式兵棋理論與模型綜述：
探討數學模式與模擬方法



圖十三以系統動力學建立疾病傳染概念模型

資料來源：自行繪製

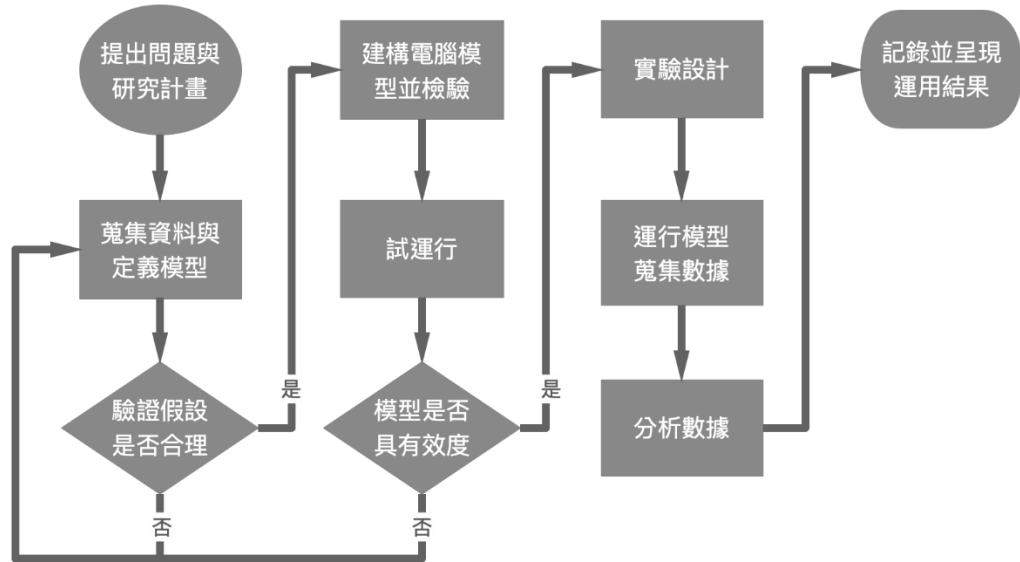
在這部分，我們簡要介紹了四種模擬方法的概念和特性。雖然這些方法為我們提供了觀察問題的視角，但它們也可能限制了我們看待問題的方式。本文認為，如果能夠綜合運用不同方法所提供的觀點和視角，最大程度地從各種不同的角度描述問題的內涵，那麼這將是模型模擬可以嘗試的方向。換句話說，結合多種模擬方法可能帶來更全面、更深入的理解，從而幫助我們更好地解決實際問題和挑戰。在未來的研究和應用中，尋求多種模擬方法的融合和互補將是一個值得探討的方向。

伍、建模與模擬程序

軍事對抗的數學模型和模擬方法的認識與使用只是整個「以模式模擬解決問題」活動的一部分。正如美軍在解釋模式模擬時所說，這是一個包括建立模型、驗證模型、運用模型、收集數據和分析數據以輔助決策的完整過程。

整個模擬研究從問題定義和研究計劃開始，到成果呈現和應用，基

本上包含以下十個步驟²¹，其中需要檢驗假設的合理性和模型的有效性，如圖所示，說明如后。



圖十四 模擬研究的步驟

資料來源：整理自註 4 p.67。

1. 提出問題與研究計畫

與領域專家以及模擬分析人員研討下列事項：

- (1) 研究目標為何？
- (2) 想要回答的研究問題（這決定模型的解析度）為何？
- (3) 如果是要比較系統效益，用來比較的效能指標是甚麼？
- (4) 界定系統範疇。

²¹ 同註 4 67.

- (5) 界定系統的構成（這會決定模型的通用性）。
- (6) 研究期程與所需要的資源。

2. 蒐集資料與定義模型

- (1) 蒐集與系統結構和運作程序有關的資訊。
- (2) 蒐集特定系統參數以及輸入有關的機率分布。
- (3) 明確地以書面將前述的資訊記錄在文件中。
- (4) 如果有既存的系統，則蒐集相關的效能數據（以備步驟 6 使用）。
- (5) 決定模型解析度。
- (6) 不一定要與系統元件一對一的對應。
- (7) 從簡單的模型開始修改起。過於全面的模型不一定能有效輔助決策，反而可能延誤時效或模糊重點。
- (8) 與上層的管理階層經常性地保持互動。

3. 驗證假設合理性

在管理階層、分析人員和領域專家面前有架構的說明假設文件的內容。這有助於：

- (1) 確認模型假設事項的正確性與完整性。
- (2) 促進專案內人員的互動。
- (3) 促進參與感。
- (4) 在實際建模之前確認(validate)，可以避免事後耗時修改。

4. 建構電腦模型並檢驗(verify)

- (1) 可以使用如 C, C++, Java 等之類程式語言，或是使用模擬軟體（如 Arena, Flexsim, ProModel, Vensim 或 AnyLogic 之類）建立電腦模型。前者的優點是建模的控制程度高、成本較低，模型運行速度可能較快；後者則購置成本較高，但建模較快，可能有利整體的專案預算控管。
 - (2) 建好電腦模型後確認電腦模型運行無誤。
5. 試運行
- 試運行電腦模式，記錄過程與數據，為下一步的驗證做準備。
6. 驗證電腦模型是否具有效度
- (1) 如果已經有現成的系統，則將模型與步驟二蒐集到的現有系統的資料作比較。
 - (2) 不論是否有現成的系統，都應該請分析員和領域專家對模型結果的正確性進行驗證。
 - (3) 運用敏感性分析找出對系統效能具有高度影響的因素，建模的時候對這些因素特別小心謹慎。
7. 實驗設計
- 確定每種系統構型中的下列數據：
- (1) 單一次模擬的耗時。
 - (2) 暖機時間，如果需要暖機的話。
 - (3) 使用不同隨機亂數的獨立模擬次數—為了建構信賴區間。

分析式兵棋理論與模型綜述：
探討數學模式與模擬方法

8. 運行模型蒐集數據

運行模型、蒐集數據以便分析。

9. 分析數據，分析數據是為了：

- (1) 找出個別系統構型的效能。
- (2) 比較候選系統構型的效能。

10. 呈現並運用結果

- (1) 將假設、電腦模型以及研究結果記錄下來。
- (2) 研究結果的處理：
 - A. 透過動畫與管理階層或其他對模型不是那麼熟悉的人員溝通。
 - B. 討論建模及確認的過程，以爭取對模型的信心。
 - C. 如果模型既具有效度，對模型又有信心，則將模擬結果用在決策過程中。

由於模型是對目標對象的一種描述，我們必須特別注意模型的有效性 (validity) 和可靠性 (reliability)。有效性表示模型是否能適切地呈現對象的特徵與本質，而可靠性則關注模型的穩定性和一致性。有時，我們使用忠實度 (fidelity) 來衡量模型效度和信度的綜合表現。因此，在模擬研究過程中，對模型效度的檢驗（第 6 步驟）尤為重要。

模型的建立和應用最終目的是為了支援決策。此目標在過程一開始就應該表現在研究目標和問題上。在過程中，必要時應不斷對假設條件和模型有效性進行檢驗，直至認為假設合理並確認模型具有效度。只有經過嚴格的流程，才能確保為決策過程提供可靠的模擬結果作為決策支援。

陸、結語

本文從模型與模擬的基本概念出發，闡述模式模擬的核心目的是輔助決策。這涉及到模型的建立與驗證、數據的蒐集與分析。在確保模型與數據的有效性及可信度後，將模擬分析結果應用於決策制定過程。

文中概述了數個軍事模型，涵蓋交戰層次的擊殺率計算、任務層次的多層防禦，以及戰役層次的藍徹斯特與適應性作戰模式。最後是理查森軍備競賽模型，可用於探討多方軍備競賽或國際關係。目的是讓讀者了解數學模型在軍事領域的應用。

對於不適合以數學模型探討的問題，本文介紹了幾種模擬方法。這些方法各具特點，適用於不同問題類型與層次，可作為研究者工具箱中的建模工具。過去這些數學模式協助軍事作業研究人員完成了許多分析或研究工作，也提出了某些作戰規律，如直線律、平方律；亦或是投入實際作戰結果的預測，如定量判定模型。對了解戰爭的規律具有其貢獻。整體來看，本研究認為這些數學模型與模擬方法具備以下特性：

1. **均質性**。不論藍徹斯特模型、適應性作戰模式、定量判定模型，甚至理查森軍備競賽模型，都具有「聚合」的特徵，也就是將不同的兵種或武器系統轉換成一個數值，可能是點數、人數，或是國防預算的金額。
2. **數學模型侷限性**。數學模型與模擬方法都有其特長與限制。例如，藍徹斯特模型與馬可夫鏈以數學方程的形式表達，具有良好的數學特性，可以解析方法快速獲得計算結果；但對於複雜問題較不容易取得易解的數學模式，需要以模擬方法來補足。
3. **模擬方法侷限性**。同樣的，本文介紹的三種模擬方法各有其方法特性與適用的問題類型，這和數學模型類似，需要針對不同的問題類型選用合適的模擬方法。
4. **以大量模擬次數取得不確定性資訊**。具備處理不確定性的數學模型，如馬可夫鏈，可以得出離散的機率分佈，提供關於不確定性的相關訊息。而模擬方法則需要透過大量的反覆模擬方能獲取關於不確定性的資訊；而大量的模擬是耗費運算資源的工作。

檢視這些方法特性之後，本研究認為軍事模型與模擬方法的發展似乎是在既有的基礎之上，結合技術的發展，朝向持續完善的方向推進，進而完備現有的方法。可以區分以下幾點論述：

1. **朝向網路化模型發展**。資訊科技的進展將作戰也朝向網路作戰的方向發展。過去是以「均質」的或稱為「塊狀」的模式為主；當今異質的、網狀的、節點的「擊殺鏈」建模概念日漸興起。網狀的作戰模式將作戰單位視為功能不同的節點，彼此相連，共同達成打擊對手的目的。而不同功能網路節點的破壞，會對作戰系統帶來不同的影響。以這種鏈狀或網狀的模型架構來建構模型是未來的趨勢之一。
2. **與優化方法結合**。當所要描述的對象複雜度高，可控制的決策變數數量多，且變數可能範圍也大的時候，要透過模擬找出優化的決策變數組合時，會面臨運算量龐大的問題。將數學模型或模擬方法結合優化方法（如遺傳演算法、粒子群演算法、簡群演算法等）以提高模型求取優化解的效率。
3. **混合方法的採用**。隨著研究對象的日益複雜，在一個模型中採用多種方法來建立模型的趨勢越來越明顯。例如，結合離散事件模擬與代理人模擬建立醫療模型；或是結合系統動力學與代理人模型建構雷射防空模型。混合方法的運用則需要有電腦程式介面，或跨方法的建模平台的支撐。
4. **與人工智能的結合**。研究人員可以運用具有效度的模型產生大量的數據來訓練人工智能，使它能夠針對類似的問題做出快速且合理的判斷。也可以透過增強式學習，讓人工智能學習動態的決策過程，應對不斷變化的問題情境。
5. **運算成本控制**。雖然人工智能能夠帶來更廣泛也令人期待的前景；但是人工智能的訓練需要以運算成本來支撐。結合計算資源分配優化(Optimal Computation Budget Allocation, OCBA)的概念與方法，使計算資源可以更合理的分配也會是重要趨勢。
6. **效度檢驗的挑戰**。模型朝向複雜化、智能化，以及混合方法的方向發展，所要面臨的核心問題依然是模型效度。也就是，模型是否足以代表所要描述的對象，讓我們理解其本質，並據以作出合理的決策。面對可能耗費大量運算成本的模型，其效度

的確認更形重要；而模型的複雜也會使得效度的檢驗更具有挑戰性。

本研究旨在回顧分析式電腦兵棋中的數學模型與模擬方法，並簡要介紹了適用於不同問題類型的數種常用數學模型。此外，我們還探討了三種主要的動態模擬方法，這些模型與方法均可用於構建分析式電腦兵棋。進一步地，本文概述了利用模擬模型進行決策支援的基本流程，特別強調了模型效度的重要性。模型的效度是建立在人們對其信賴基礎上的，因此，在建模過程中與模型相關的各方廣泛且持續的交流是至關重要的。

在總結中，本文提出了數學模型與模擬方法的一般特性，如均質、侷限性、運算資源的消耗。並展望了這些特性將如何影響分析式電腦兵棋的未來發展。未來的發展方向包括網狀化模型、優化策略、混合方法、人工智能的應用，以及運算成本的控制等方面。我們預計這些方法的持續改進與整合將進一步促進模型與模擬方法在分析式電腦兵棋領域的應用，從而提供更加有效的決策支援。

分析式兵棋理論與模型綜述：
探討數學模式與模擬方法

參考書目

一、專書

- Borshchev, Andrei, *The Big Book of Simulation Modeling: Multimethod Modeling with AnyLogic 6* (Kindle 版本)
- Dupuy, T. N. Dupuy, *Numbers, Predictions and War: Using History to Evaluate Combat Factors and Predict the Outcome of Battles*, Revised Ed. (Fairfax, Virginia: HERO Books, 1985).
- Dupuy, T. N., Johnson, Curt, Bongard David L., and Dupuy, Arnold C., *If War Comes, How to Defeat Saddam Hussein* (McLean, Virginia: HERO Books, 1991).
- Epstein, J. M., *The Calculus of Conventional War: Dynamic Analysis without Lanchester Theory* (Washington, D.C. : The Brookings Institution: 1985).
- Gilbert, Nigel and Troitzsch, Klaus G., *Simulation for the Social Scientist*, 2nd Ed. (Berkshire, England: Open University Press, 2005).
- Gilbert, Nigel, *Agent-based Models* (Thousand Oaks, California: Sage Publications, Inc., 2008).
- Ilachinski, Andrew, *Artificial War Multiagent-Based Simulation of Combat* (Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004).
- Law, Averill M., *Simulation Modeling and Analysis* (Tucson: Averill M. Law & Associates, Inc., 2013).
- Sterman, John D., *Business Dynamics, Systems Thinking and Modeling for a Complex World* (Boston: McGraw-Hill, 2000).
- Taylor, James G, *Lanchester Models of Warfare, Volume II* (Monterey, California: ORSA-Operation Research Society of America, 1983).
- The Under Secretary of Defense for Acquisition Technology, *DoD Modeling and Simulation (M&S) Glossary* (Washington, D.C.: Defense Modeling and Simulation Office, 1998).

二、學術性期刊論文

劉達生、孟昭宇、黃順萌，〈戰車攻擊力評估法則之建立〉，《裝甲兵季刊》，192 期，民 93，頁 42-55。

Fisunoglu, Ali, "System Dynamics Modeling in International Relations," *All Azimuth*, Vol. 8, No. 2, 2019, pp. 231-253

Hegselmann, Rainer and Krause, Ulrich, "Opinion Dynamics and Bounded Confidence Models, Analysis, and Simulation," *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, Vol.5, No. 3, 2002.

Menq, Jau-yeu, Tuan, Pan-chio and Liu, Ta-sheng, "Discrete Markov ballistic missile defense system modeling," *European Journal of Operational Research*, 178, 2007, p. 577.

Menq, Jau-yeu, Tuan, Pan-chio and Liu, Ta-sheng, "Conceptual Lanchester-type Decapitation Warfare Modelling," *Defense Science Journal*, Vol.57, No. 4, 2007, p. 453.

Robinson, Stewart, "Conceptual modelling for simulation Part I: definition and requirements," *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 59, No.3, 2008, pp. 278-290.

三、學位論文

李泰平，《陸軍地面作戰基本戰術分析—適應性作戰模型之應用》，國防大學管理學院資源管理及決策研究（民 100），頁 40。

四、網際網路資料

Wilensky, Uri, *Modeling Natures Emergent Patterns with Multi-Agent Languages*, Northwestern University, 2001. 下載網址：
<https://ccl.northwestern.edu/2013/mnep9.pdf>, 存取日期 2023/2/4。

五、專利報告

唐世平（發明人），〈基於電腦模擬技術的選舉結果預測方法〉，中華民國專利資訊檢索系統，證書號：I660283。

分析式兵棋理論與模型綜述：
探討數學模式與模擬方法